Entdeckendes Lernen
Sommersemester 07
Dr. Katja Lengnink

UNIVERSITÄT SIEGEN

Erwartungshorizont zur Klausur Entdeckendes Lernen

Aufgabe 1 (Mathematisches Entdecken - Zahlenketten)

- Denken Sie sich zwei natürliche Zahlen und schreiben Sie sie in die linken Felder der Fünferkette.

2	9			

- Addieren Sie die beiden gewählten Zahlen und schreiben Sie die erhaltene Zahl rechts davon in die Zelle.

2	9	11		

- Wieder addieren Sie die beiden rechten Zahlen und schreiben das Ergebnis in die anschließende Zelle. Und so fort. Es entsteht die folgende Fünferkette:

2	9	11	20	31

  a) Denken Sie sich eine eigene Fünferkette aus.
  b) Geben Sie mindestens drei Fünferketten mit dem Ergebnis 100 an. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

				100

  c) Geben Sie alle Fünferketten mit dem Ergebnis 100 an. Warum sind das alle. Beweisen Sie!
  d) Wie können Grundschulkinder argumentieren, dass sie alle Lösungen bekommen haben? Schreiben Sie eine Argumentation, die auf Grundschulniveau gehalten ist.

Lösungen:
a) Wir wählen irgendwelche Zahlen, zum Beispiel Fibonacci. Die Lösung ergibt **1P**

1	1	2	3	5

b) Man kann hier zum Beispiel rückwärts rechnen:

50	0	50	50	100

Man kann aber auch systematisch vorwärts vorgehen:

a	b	a+b	a+2b	100

Dann ist 100 = 2a + 3b. Wir lösen auf: 100 -3b = 2a.

Also zum Beispiel b = 32. Dann ist a = 2.

2	32	34	66	100

Oder b = 16. Dann ist 100 – 3 · 16 = 52 und a = 26.

26	16	42	58	100

Man könnte auch einfach systematisch probieren.
Für jedes Beispiel gibt es **1P** und für die Vorgehensweise auch **1P**.

c) In b) wurde bereits die Vorgehensweise mit Variablen eingeführt. Das Ergebnis war die Beziehung 100 -3b = 2a. Also muss 3b durch zwei teilbar sein, b ist demnach eine gerade Zahl, die höchstens 32 sein kann, da 2a + 3b = 100 sind und 33 mal 3 bereits 99 ist. b muss aber gerade sein, daher 32.
Für jede gerade Zahl b bleibt eine gerade Zahl 100 - 3b übrig. Diese teilen wir durch zwei und erhalten a.

Die Paare (b, a) sind (32, 2); (30, 5); (28, 8), … bis (0,50) sofern die Null noch zu den natürlichen Zahlen hinzugehört.
Für das Aufstellen der Formel und das Generieren von Beispielen gibt es **2P**.
Für die Auswertung und die Begründung, dass es wirklich alle sind, gibt es ebenfalls **2P**.
d) Grundschulkinder könnten so argumentieren, dass die Zahlen ab Feld 3 mindestens gleich bleiben (bei b = 0) oder größer werden. Dann ist der Wert in Feld 3 höchstens 50. Man kann nun systematisch rückwärts rechnen und kommt so auf

50	0	50	50	100

Wenn man nun für Feld 3 den Wert 49 ausprobiert, dann müsste Feld 4 den Wert 51 haben, Feld 2 den Wert 2 und Feld 1 den Wert 47.

47	2	49	51	100

So kann man systematisch weitergehen vom mittleren Feld aus.

44	4	48	52	100

Man kann entdecken, dass in Feld 2 immer eine gerade Zahl stehen muss, da Feld 3 und Feld 4 immer beide gerade oder beide ungerade sind. Man kann auch entdecken, dass sich der Wert in Feld 1 bei jedem Schritt um drei verringert und in Feld 2 um zwei erhöht. So kann man sicherstellen, dass alle Zahlenketten erwischt werden.
Wo ist diese Reise zu Ende? Machen wir mal einen Test: Wir setzen in Feld 3 testweise die 10. Dann bekommt Feld 4 den Wert 90, Feld 2 wird 80 und damit größer als Feld 3. Damit bekommen wir ein Problem bei Feld 1.

?	80	10	90	100

Also Feld 3 darf nicht zu klein werden. Schlimmstenfalls, wenn in Feld 1 Null stünde, dann wäre Feld 2 mit Feld 3 gleichwertig und Feld 4 hätte den doppelten Wert von Feld 3. Also darf der Wert in Feld 3 nicht kleiner als 34 werden.
Testen wir das noch einmal:

2	32	34	66	100

Geht!

Und kleiner?

?	34	33	67	100

Klappt nicht mehr.

Nun ist es einfach, alle Zahlenketten hinzuschreiben.

Für eine Argumentation ohne Variablen bekommt man hier **3P**. Wichtig für den Erhalt aller drei Punkte ist, dass die Vollständigkeit der Lösungen Thema ist und ausreichend argumentiert wird.

Aufgabe 2 (Syntaktisch, semantisch, pragmatisch)
In der Vorlesung und in den Tutorien wurden die syntaktische, die semantische und die pragmatische Erklärungsebene mathematischer Sachverhalte angesprochen.

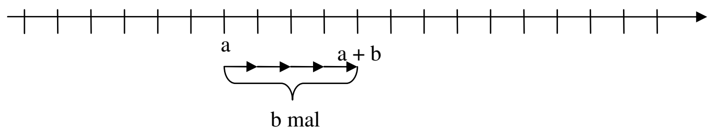
a) Was ist mit den Begriffen gemeint? Geben Sie jeweils eine kurze Beschreibung.
b) Erklären Sie die Addition der ganzen Zahlen auf diesen drei Ebenen. (Sie dürfen die Addition und Subtraktion der natürlichen Zahlen voraussetzen.) Wählen Sie dazu drei repräsentative Zahlenbeispiele für alle auftauchenden Fälle. Machen Sie deutlich, was jeweils zu welcher Ebene gehört und warum.

Lösungen:
a) Die syntaktische Erklärungsebene bezieht sich rein auf das formale Umgehen mit den mathematischen Sachverhalten.
Die semantische Erklärungsebene versucht, den Inhalten einen Sinn zu geben, zum Beispiel auf der innermathematischen Eben der Vorstellungen.
Die pragmatische Erklärungsebene versucht, eine Anwendung zu den mathematischen Sachverhalten anzugeben, in denen eine solche Rechnung vorkommt und einen praktischen Nutzen hat.
Die Darstellung dieser drei Erklärungsebenen in eigenen Worten macht jeweils **1P**.

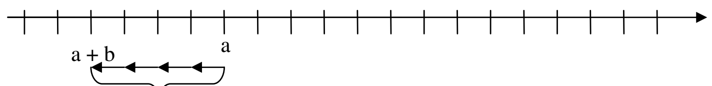
b) Die Addition der ganzen Zahlen:
Syntaktisch:

- Für a, b positiv oder Null gilt a + b = a + b im Sinne der natürlichen Zahlen.
- Für a positiv und b negativ gilt (-b) ist positiv und a + b = a – (-b). Ebenso für den Fall a negativ und b positiv: Dann ist (–a) positiv und a + b = b – (-a).
- Für a und b negativ: dann ist a + b = -((-a) + (-b)).

Semantisch:
Hierzu können wir den Zahlenstrahl anführen:
Beim Addieren einer negativen Zahl wird auf dem Zahlenstrahl soweit nach links gelaufen, wie der Wert der Zahl ist. Beim Addieren einer positiven Zahl wird so weit nach rechts gelaufen, wie der Wert der Zahl ist.
Ist b positiv. So ist a + b durch laufen von a aus nach rechts so weit wie b Wert ist zu erreichen. Ob a negativ oder positiv ist, ist in dem Fall egal.



Ist b negativ, so ist a + b durch Laufen von a aus nach links so weit wie der Wert von b ist, zu erreichen. Der Wert von b ist –(b)



Es gilt: a + b = a – (-b), da nach links laufen in N dem Subtrahieren entspricht

Auf der semantischen Ebene gibt es demnach nur zwei relevante Fälle zu unterscheiden.
Pragmatisch:
Addition von ganzen Zahlen kann man mit Schulden oder Temperatur erklären.
Elsa bekommt 3 € Taschengeld und 5 € von ihrer Oma. Also hat Elsa 8 € bekommen. Zusammenzählen in einer Sachsituation. Guthaben positiv. (3+ 5 = 8)
Elsa hat 3 € Schulden (gedanklich -3) sie bekommt von ihrer Oma 5 €. Sie begleicht ihre Schulden und hat daher noch 2 €. ((-3) + 5 = 2). Elsa hat bei ihrem Bruder 3 € gut, bei ihrer Mutter 5 € Schulden. Insgesamt hat sie, wenn der Bruder die mutter auszahlt noch 2 € Schulden. (3 + (-5) = (-2))
Elsa hat 3 € Schulden bei ihrem Bruder und 5 € Schulden bei ihrer Mutter, also hat sie insgesamt 8 € Schulden. ((-3) + (-5) = (-8))

Für jede Ebene gibt es **3P**, also insgesamt auf b) 9 Punkte.

Aufgabe 3 (Mathematisches Modellieren)

a) Beschreiben Sie zwei mögliche Lösungswege für die folgende Aufgabe (aus PISA 2000). Erläutern Sie die Schritte des Modellierungskreislaufs, die beim Bearbeiten der Aufgabe (nach Ihren Lösungswegen) durchlaufen worden sind.

FLÄCHE EINES KONTINENTS

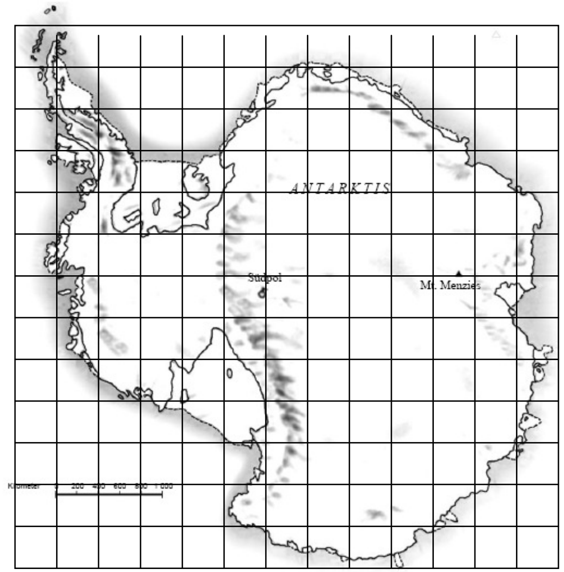
Hier siehst du eine Karte der Antarktis.

Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt.
Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist. (Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

b) Verändern Sie die Aufgabe oder entwerfen Sie eine andere Aufgabe so, dass potentiell noch mehr Schritte des Modellierungskreislaufs beim Bearbeiten der Aufgabe durchlaufen werden müssen. Beschreiben Sie genau, welche Schritte hinzukommen und was daran gelernt werden kann.

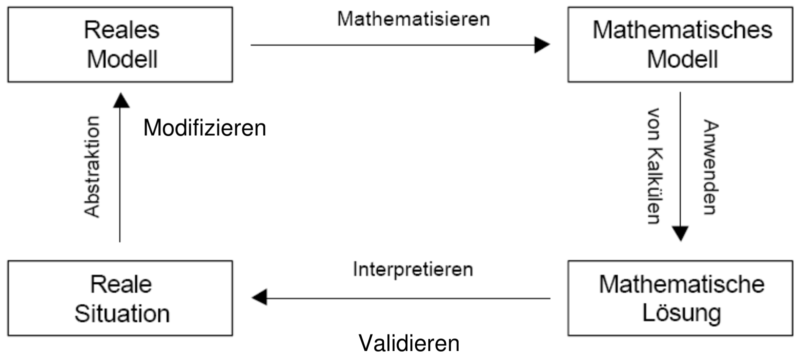
Lösungen:
a)
Zunächst die zwei Lösungen:
Lösung 1 könnte sein: Der Schüler legt ein Rechteck um die Antarktis, es hat die Maße 4500 km mal 5000 km (22 500 000 qkm). Er berechnet den Flächeninhalt des Rechtecks. Dann legt er ein Rechteck in die Antarktis. 3500 km mal 2000 km. Er berechnet wieder den Flächeninhalt(7 000 000 qkm). Nun berechnet er den Mittelwert der beiden Flächeninhalte14 750 000 qkm.
Lösung 2 geht mit einem Raster vor: Ein Raster über die Antarktis gelegt. Nun wird abgezählt. 75 Quadrate liegen vollständig über der Antarktis. Jedes Quadrat hat eine Fläche von 160000 qkm. 38 Quadrate liegen halb über der Antarktis. Nach diesem Ansatz könnte man rechnen: 94 mal 160000 = 15 040 000 qkm.

Für die beiden Lösungen gibt es je **2P.**



Wenn man nun schaut, welche Schritte des Modellierungskreislaufs in den beiden Lösungen durchlaufen wurden, dann ist zunächst bereits ein Realmodell vorhanden (wir bekommen ja nicht die Antarktis vorgeführt, oder stehen sogar dort, sondern uns ist bereits eine Karte und ein Maßstab gegeben).
Auf der Basis dieses Realmodells wird nun ein mathematisches Modell erarbeitet. Entweder durch ein Verständnis von Mindestens und Höchstens (Außen- und Innenmaße) und die Mittelwertbildung, oder durch das Raster und Abzählen der Flächen. Es ginge sicher auch noch viel feiner.
Ist das mathematische Modell bereitet, so kann gerechnet werden. Das führt in diesem Falle zu einer mathematischen Lösung.
Die beiden Lösungen unterscheiden sich nicht so stark voneinander. Validieren oder Interpretieren ist an dieser Stelle nicht gefragt.

Für diese Analyse und Beschreibung gibt es **2P.**

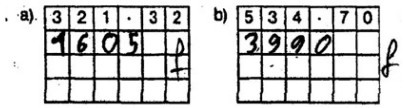


Der Modellierungskreislauf ist in dem Beispiel also nur im rechten Bereich durchlaufen worden.
b) Man könnte zum Beispiel einen Globus statt einer Karte mit Maßstab nehmen, da ist man zwar auch bereits einen kleinen Schritt in Richtung Realmodell gegangen, aber die Reale Situation muss noch weiter eingegrenzt werden. Wir haben ja ohnehin nur ein Modell unserer Erde, aber hier ist dann noch einiges Weitere zu vernachlässigen. Man muss sich etwa überlegen, wie aus der Karte auf der Kugeloberfläche die Karte in der Ebene erstellt werden soll und was das mit der Fläche macht.
Schülerinnen und Schüler können daran eine Menge über Geometrie lernen und darüber, wie eurozentrisch in der Regel unsere Karten sind (Vergleich mit anderen Weltkarten ist möglich). Hier würde also der linke Pfeil des Abstrahierens von einer realen Situation (die auch bereits modellhaft ist) zum Realmodell, das dann mathematisiert werden kann, hinzukommen.

In dem Fall wäre auch ein Validieren hilfreich. Wie weit stimmt das erhaltene Ergebnis mit dem überein, was im Atlas zur Fläche der Antarktis steht. In wie weit beeinflusst die Projektion der Fläche der Antarktis von der Kugeloberfläche auf die Ebene den erhaltenen Flächeninhalt. Unterschiedliche Vorgehensweise könnten verglichen werden. Hier käme demnach der Prozess des Interpretierens und Validierens ins Spiel. Eventuell würde auch das einen oder andere mathematische Modell verworfen oder verfeinert werden, der Modellierungskreislauf demnach noch ein weiteres Mal durchlaufen.

Für das Verändern der Aufgabe gibt es **4P**, für die Beschreibung der hinzukommenden Modellierungsschritte gibt es **2P**.

Aufgabe 4 (Fehler)
Aus dem Buch „Wie Kinder rechnen“ von Selter/Spiegel stammen die folgenden Rechungen des Schülers Marcel:



a) Beschreiben Sie, wie Marcel gerechnet haben könnte, um auf die Ergebnisse zu kommen. Welche Fehler sind ihm dabei unterlaufen? Beschreiben Sie diese sorgfältig.
b) Zu welchem Ergebnis würde Marcel vermutlich bei 345 · 17 kommen? Rechnen und begründen Sie.
c) Welche (fehlenden) Vorstellungen könnten für die Fehler verantwortlich sein? Begründen Sie Ihre Antwort.
d) Geben sie drei verschiedene Hilfestellungen für Marcel an und ordnen Sie Ihre Hilfestellungen nach dem Prinzip der minimalen Hilfe ein. Erläutern Sie dieses.

Lösungen:
a) Marcel könnte folgendermaßen gerechnet haben:
In a) 321 · 3 = 963 und 321 · 2 = 642. 963 + 642 = 1605.
In b) $\underline{534 \cdot 70}$ = 3990
28 0
21
35
Bei beiden Rechnungen hat Marcel nicht auf die Stellenwerte seines Ergebnisses geachtet. Das bedeutet, dass er im ersten Beispiel nicht sieht, dass die 321 · 3 Zehner sind, die er bekommt, als nicht 963 Einer sondern 963 Zehner bzw. 9630 Einer. Daher rechnet er die erhaltenen Ergebnisse nicht sinngerecht zusammen. Ebenso im zweiten Beispiel, wobei er da (aus welchem Grund auch immer), der 5 mal 7 eine Sonderrolle gibt, vielleicht weil er sonst auf ein zu kleines Ergebnis käme. Allerdings wird hier auch deutlich, dass Marcel Schwierigkeiten mit Überträgen hat. Im ersten Beispiel konnte er die Rechnung 321 · 3 korrekt ausführen, während er das im zweiten Beispiel mit 534 · 7 nicht schafft.

Für die Analyse dieser Rechnungen mit Beschreibung gibt es **4P.**

b) Ich würde folgende Rechnung vermuten:
$\underline{345 \cdot 17}$ = 3723 oder aber eine andere Vermischung der Stellenwerte.
35
28
21
345

Dafür gibt es **1P.**

c) Ich würde vermuten, dass Marcel zu schnell auf das formale Verfahren der schriftlichen Multiplikation trainiert wurde. Er hat noch nicht verstanden, was er da genau rechnet. Vielleicht hat er gar keine Vorstellung hinter dem Verfahren. Zumindest hat er keine Vorstellung davon, um welche Einheiten es sich bei seinen

Zahlen handelt. Er versucht dennoch, das Ergebnis in einer plausiblen Größenordnung hinzubekommen.

Für die Vorstellungsebene gibt es **2P.**

d) Eine erste Hilfestellung könnte zunächst darin bestehen, Marcel seine Rechnung erläutern zu lassen. In dem Prozess des Erklärens verlangsamen sich die einzelnen Rechenschritte und die Schritte müssen mit Muße überdacht werden. Eine Möglichkeit sind hier auch die Reisetagebücher, in denen die Lernenden ihr Vorgehen beschreiben.
Eine zweite Hilfestellung geht davon aus, dass Marcel nicht nur schusselig war und daher nicht auf seine Stellenwerte geachtet hat, sondern dass ihn das Verständnis dahinter fehlt. Dann wäre es eine Hilfe, die Rechnung an der Stellentafel zu veranschaulichen. Man könnte zunächst mit 534 · 7 beginnen und Marcel bitten, die Rechnung konkret durchzuführen. Alternativ kann man das auch mit anderem Rechenmaterial machen.

Tausender	Hunderter	Zehner	Einer

Eine dritte Hilfestellung ist, Marcel auf seinen Fehler aufmerksam zu machen. Das Verfahren könnte ihm noch einmal grundsätzlich erklärt werden und zunächst an einfachen Beispielen später an schwierigen Beispielen trainiert werden.

Das Prinzip der minimalen Hilfe sagt aus, dass vor der inhaltlichen Hilfestellung zunächst noch strukturell geholfen werden kann:

- Überprüfe dein Ergebnis, kann das sein?
- Erläutere, wie du vorgegangen bist.
- Kannst du deine Rechnung mit Material durchführen oder veranschaulichen?
- Schau noch mal im Buch nach, wie schriftlich multipliziert wird.

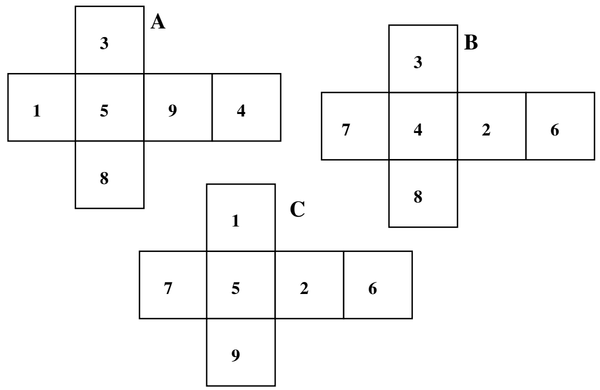
Nach dieser eher strukturellen Hilfe gibt es inhaltlich Hilfestellungen, die auf eine enaktive oder ikonische Ebene zurückgreifen können, oder auch nur eine andere Rechenmethode vorschlagen:

- Veranschauliche mit Hilfe der Stellentafel
- Rechne anhand des Multiplikationskreuzes

Zuletzt wäre die Hilfestellung, die genau und schrittweise den Rechenweg durchgeht und den Fehler erklärt. Meist hat dies den Nachteil, dass dabei der Schüler verloren geht, da sein Problem an einer anderen Stelle liegt. Dies herauszubekommen und vernünftig einzuschätzen macht u.a. das Geschick des Lehrers aus.

Für die drei Hilfestellungen gibt es je **1P.** Für das Erläutern des Prinzips der minimalen Hilfe gibt es **2P.**

Zusatzaufgabe (Miwin'sche Würfel)
Sie haben die folgenden drei Würfel gegeben:



a) Analysieren Sie welcher Würfel gegen welche anderen gewinnt. Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg.
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit mit allen drei Würfeln eine Augensumme zu würfeln, die durch drei teilbar ist?

Lösungen:

A gegen B	**2**	**3**	**4**	**6**	**7**	**8**
1	B	B	B	B	B	B
3	A	-	B	B	B	B
4	A	A	-	B	B	B
5	A	A	A	B	B	B
8	A	A	A	A	A	-
9	A	A	A	A	A	A

Beim Würfeln von A gegen B ist in 3 von 36 Fällen Patt, in 16 von 36 Fällen gewinnt B und in 17 von 36 Fällen gewinnt A. Das heißt A gewinnt gegen B mit einer Wahrscheinlichkeit von 17/36.

A gegen C	**1**	**2**	**5**	**6**	**7**	**9**
1	-	C	C	C	C	C
3	A	A	C	C	C	C
4	A	A	C	C	C	C
5	A	A	-	C	C	C
8	A	A	A	A	A	C
9	A	A	A	A	A	-

Beim Würfeln von A gegen C ist in 3 von 36 Fällen Patt, in 16 von 36 Fällen gewinnt A und in 17 von 36 Fällen gewinnt C. Das heißt C gewinnt gegen A mit einer Wahrscheinlichkeit von 17/36.

B gegen C	1	2	5	6	7	9
2	B	-	C	C	C	C
3	B	B	C	C	C	C
4	B	B	C	C	C	C
6	B	B	B	-	C	C
7	B	B	B	B	-	C
8	B	B	B	B	B	C

Beim Würfeln von B gegen C ist in 3 von 36 Fällen Patt, in 16 von 36 Fällen gewinnt C und in 17 von 36 Fällen gewinnt B. Das heißt B gewinnt gegen C mit einer Wahrscheinlichkeit von 17/36.

Für diese Analyse gibt es **3P** (rein reproduktiv)

b) Die Augensummen entwickeln wir schrittweise:

Summe AB	2	3	4	6	7	8
1	3	4	5	7	8	9
3	5	6	7	9	10	11
4	6	7	8	10	11	12
5	7	8	9	11	12	13
8	10	11	12	14	15	16
9	11	12	13	15	16	17

Summe ABC	1	2	5	6	7	9
3 1 Mal	4	5	8	**9**	10	**12**
4 1 Mal	5	**6**	**9**	10	11	13
5 2 Mal	**6**	7	10	11	**12**	14
6 2 Mal	7	8	11	**12**	13	**15**
7 4 Mal	8	**9**	**12**	13	14	16
8 3 Mal	**9**	10	13	14	**15**	17
9 3 Mal	10	11	14	**15**	16	**18**
10 3 Mal	11	**12**	**15**	16	17	19
11 5 Mal	**12**	13	16	17	**18**	20
12 4 Mal	13	14	17	**18**	19	**21**
13 2 Mal	14	**15**	**18**	19	20	22
14 1 Mal	**15**	16	19	20	**21**	23
15 2 Mal	16	17	20	**21**	22	**24**
16 2 Mal	17	**18**	**21**	22	23	25
17 1 Mal	**18**	19	22	23	**24**	26

72 der insgesamt 216 Ausfälle für die Augensumme der drei Würfel sind durch drei teilbar. Die Wahrscheinlichkeit beträgt demnach 1/3.

Das Aufstellen uns Auswerten der Tabellen in b) erbringt **3P.**

Notenskala:

Punkte	Note
0 – 21	Nicht bestanden
21,5 - 29	4
29,5 – 36	3
36,5 - 43	2
Ab 43,5	1

14 Klausurpunkte können durch die 30 Hausaufgabenpunkte abgelöst werden (Null-Eins-Regelung, nur wer alle 30 Punkte erbracht hat, hat den Bonus).